

~ CURS 12 ~

2. Circuite electrice de curent continuu

II.1. Noțiuni introductive

Circuitele de curent continuu sunt circuite în care mărimile de excitație (intensitățile curenților electrice și tensiunile electrice) sunt constante în timp. Circuitele de curent continuu sunt rezistive, deoarece bobinele și condensatoarele nu intervin prin parametrii lor caracteristici, având un comportament particular:

→ dacă intensitatea curentului ce parcurge bobina este continuu (constant în timp) $i_L = I$ pentru $t \in (-\infty, \infty)$, ecuația caracteristică a bobinei devine $u_L = L \frac{di_L}{dt} = 0$, deci bobina se comportă în curent continuu ca un scurtcircuit ($R = 0$);

→ dacă tensiunea la bornele condensatorului este continuă (constantă) $u_C = U$ pentru $t \in (-\infty, \infty)$, ecuația caracteristică a condensatorului devine $i_C = C \frac{du_C}{dt} = 0$, deci condensatorul se comportă în curent continuu ca un gol ($R \rightarrow \infty$).

Cu toate acestea, bobina parcursă de curent continuu I acumulează energie magnetică, iar condensatorul alimentat cu tensiune constantă U la borne acumulează energie electrică.

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 \qquad W_e = \frac{1}{2} CU^2$$

II.2. Relații de bază ale circuitelor electrice de curent continuu

Studiul circuitelor rezistive liniare în curent continuu oferă posibilitatea introducerii conceptelor de echivalență și modelare, care apoi se vor utiliza pentru simplificarea analizei circuitelor complexe.

Rezolvarea circuitelor electrice de curent continuu constă în determinarea intensităților curenților prin laturi și a tensiunilor la bornele acestora, când se cunosc rezistențele laturilor, t.e.m. ale surselor independente de tensiune, intensitățile surselor independente de curent și parametrii surselor comandate. Pentru un circuit cu L laturi, pentru care se cunosc elementele enunțate anterior, numărul de necunoscute este egal cu L .

A. Legea lui Ohm generalizată

Forma integrală a legii conducției electrice pentru o porțiune neramificată de conductor este:

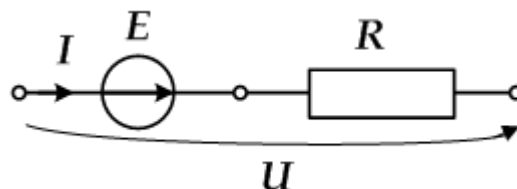


Fig. 2.1. Explicativă pentru legea lui Ohm

$$U + E = R \cdot I$$

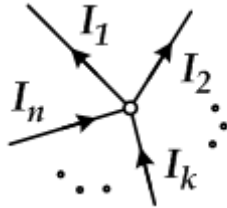
Relația anterioară poate fi scrisă și sub formele:

$$U = R \cdot I - E$$

$$I = G \cdot U + G \cdot E$$

B. Teoremele lui Kirchhoff

- a. Prima teoremă a lui Kirchhoff: suma algebrică a intensităților curenților electrici dintr-un nod al circuitului este egală cu zero.



$$\sum_{k \in n_j} I_k = 0 \quad (+ \text{ cei care ies din nod})$$

Fig. 2.2. Explicativă pentru teorema întâi a lui Kirchhoff

Într-un circuit electric, închis și izolat se pot scrie $N-1$ ecuații independente ale primei teoreme Kirchhoff.

- b. A doua teoremă a lui Kirchhoff: suma algebrică a căderilor de tensiune dintr-o buclă a unui circuit este egală cu suma algebrică a t.e.m. de la bornele surselor de tensiune din aceeași buclă.

$$\sum_{k \in b_n} U_k = \sum_{k \in b_n} E_k \quad \text{sau} \quad \sum_{k \in b_n} R_k \cdot I_k = \sum_{k \in b_n} E_k$$

Într-un circuit electric, închis și izolat se pot scrie B ecuații independente ale celei de a doua teoreme a lui Kirchhoff.

Dacă în circuit există surse de curent (comandate sau independente) și surse de tensiune (comandate și/sau independente), sistemul de ecuații ale teoremelor lui Kirchhoff se poate scrie:

$$N-1 \text{ ecuații } K_I: \quad \sum_{k \in n_j} I_k = - \sum_{k \in n_j} (J_k + J_{ck})$$

$$B \text{ ecuații } K_{II}: \quad \sum_{k \in b_n} (R_k \cdot I_k + U_{Jk} + U_{Jck}) = \sum_{k \in b_n} (E_k + E_{ck})$$

II.3. Teoremele de transfigurare a circuitelor electrice

A. Echivalența surselor reale de energie

O sursă reală de energie admite două scheme echivalente: una ca sursă reală de tensiune și alta ca sursă reală de curent.

$$U + E = R \cdot I \Rightarrow I = G \cdot U + G \cdot E \Rightarrow \begin{cases} I_G = G \cdot U \\ J = G \cdot E \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} J = \frac{E}{R} \\ G = \frac{1}{R} \end{cases}$$

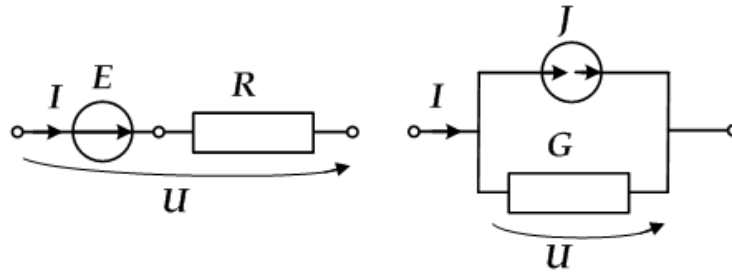


Fig. 2.3. Echivalarea dintre sursele reale de energie

B. Transfigurarea serie

Fie n laturi active conectate în serie (astfel încât să fie parcurse de același curent).

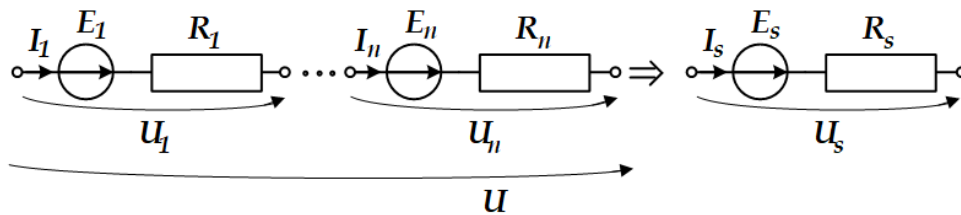


Fig. 2.4. Conectarea a n laturi în serie

Ecuțiile de funcționare ale circuitului sunt:

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I_s$$

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n = U_s = U$$

Folosind ecuația caracteristică a laturii pentru a exprima tensiunea U_k și însumându-le, se obține:

$$U = \sum_{k=1}^n U_k = \sum_{k=1}^n R_k \cdot I_k - \sum_{k=1}^n E_k = \left(\sum_{k=1}^n R_k\right) \cdot I - \sum_{k=1}^n E_k$$

Ecuția laturii echivalente este:

$$U = R_s \cdot I - E_s \Rightarrow \begin{cases} R_s = \sum_{k=1}^n R_k \\ E_s = \sum_{k=1}^n E_k \end{cases}$$

→ **teoreme divizorului de tensiune**: stabilește modul în care se distribuie tensiunea aplicată unei conexiuni serie de rezistoare.

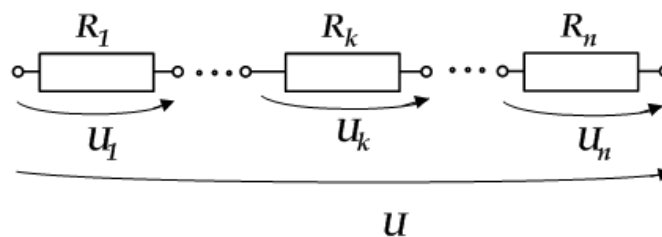


Fig. 2.5. Regula divizorului de tensiune pentru n rezistoare înseriate

$$U_k = R_k \cdot I_k = R_k \cdot \frac{U}{R_S} = \frac{R_k}{\sum_{k=1}^n R_k} \cdot U$$

C. Transfigurarea paralel

Când conectăm n laturi active între aceleași două noduri, astfel încât să aibă aceeași tensiune la borne, se obține conexiunea paralel.

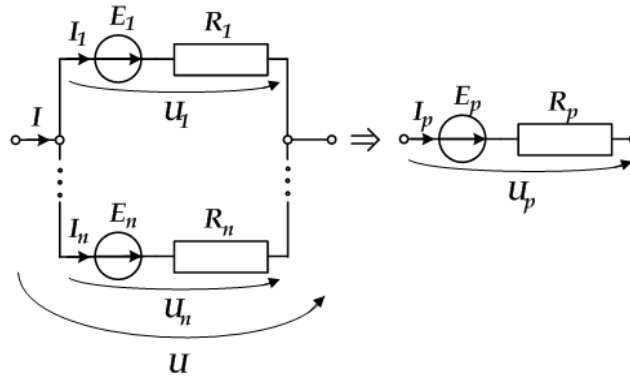


Fig. 2.6. Conectarea a n laturi în paralel

Ecuțiile de funcționare ale circuitului sunt:

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$$

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n = I = I_p$$

Folosind ecuația caracteristică a laturii pentru a exprima tensiunea U_k și însumându-le, se obține:

$$I = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n G_k \cdot U_k + \sum_{k=1}^n G_k \cdot E_k = \left(\sum_{k=1}^n G_k\right) \cdot U + \sum_{k=1}^n G_k \cdot E_k$$

Ecuția laturii echivalente este:

$$I = G_p \cdot U + E_p \cdot G_p \Rightarrow \begin{cases} G_p = \sum_{k=1}^n G_k \text{ sau } \frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \\ E_p = \frac{\sum_{k=1}^n G_k \cdot E_k}{\sum_{k=1}^n G_k} \end{cases}$$

→ teoreme divizorului de curent: stabilește modul în care se distribuie curentul în rezistoarele conectate în paralel.

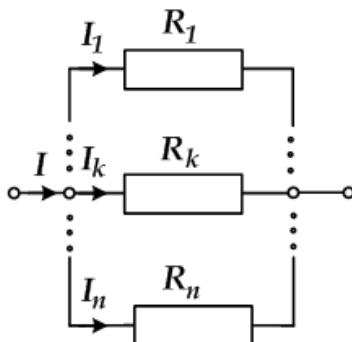


Fig. 2.7. Regula divizorului de curent pentru n rezistoare în paralel

$$I_k = \frac{U}{R_k} = \frac{R_p \cdot I}{R_k} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j}} \cdot I$$

D. Transfigurarea stea - triunghi

Conexiunea stea reprezintă conectarea celor trei (n) rezistențe într-un punct comun, numit neutru. Conexiunea triunghi (poligon) reprezintă conectarea începutului fiecărei rezistențe la sfârșitul celei anterioare.

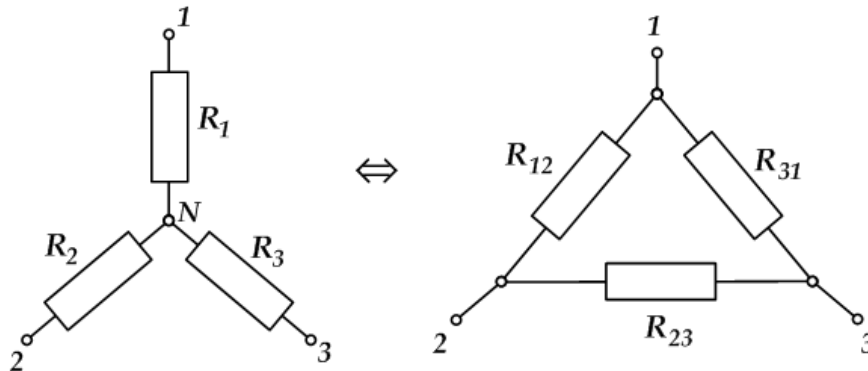


Fig. 2.8. Conexiunea stea, respectiv triunghi pentru rezistoare

$$\begin{aligned} \Lambda \rightarrow \Delta \\ R_{12} &= \frac{R_1 R_2}{R_3} + R_1 + R_2 \\ R_{23} &= \frac{R_2 R_3}{R_1} + R_2 + R_3 \\ R_{31} &= \frac{R_3 R_1}{R_2} + R_3 + R_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \rightarrow \Lambda \\ R_1 &= \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned}$$

II.4. Teorema conservării puterilor

În orice circuit electric, închis și izolat, suma puterilor la bornele elementelor este zero.

$$\sum_{k=1}^l P_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^l U_k \cdot I_k = 0$$

În cazul circuitelor rezistive, această relație poate fi exprimată sub forma unei ecuații de bilanț al puterilor: suma puterilor electromagnetice generate de sursele de energie (independente și/sau comandate) este egală cu suma puterilor consumate în rezistoare, prin efect Joule-Lenz.

$$\sum_{k=1}^l (E_k \cdot I_k + U_{jk} I_k + E_{ck} \cdot I_k + U_{jck} \cdot J_{ck}) = \sum_{k=1}^l R_k \cdot I_k^2$$

II.5. Metode sistematice de rezolvare a circuitelor

Pentru circuitele electrice de mari dimensiuni, rezolvarea cu ajutorul ecuațiilor Kirchhoff poate fi anevoioasă; de aceea, s-au căutat metode alternative de rezolvare a circuitelor care să ofere un sistem de ecuații redus.

A. Metoda curenților de buclă (ciclici)

Principiul acestei metode constă în alegerea unui arbore complet atașat circuitului așa încât curenții care circulă prin laturile coarborelui (coardele) să fie aleși drept curenți independenți. Numărul acestora este dat de numărul de coarde ($L-N+1$).

Ordinul sistemului de ecuații a fost astfel redus de la L ecuații la $L-N+1$ (B) ecuații.

Obs: Alegerea arborelui/coarborelui în raport cu teorema de existență și unicitate asigură plasarea surselor de curent pe coarde.

Algoritmul de aplicare a metodei:

- P1. Se aleg buclele formate dintr-o coardă și în rest ramuri;
- P2. Se aleg sensurile de referință ale curenților prin laturi și ale buclelor;
- P3. Se scriu ecuațiile celei de a doua teoremă a lui Kirchhoff forma în curenți pentru buclele ce nu conțin surse ideale (independente și/sau comandate) de curent;

Obs: Curenții independenți din sursele de curent au valorile cunoscute (date).

- P4. Se exprimă curenții laturilor în funcție de curenții buclelor (I_{bn} – necunoscutele sistemului metodei);
- P5. Se rezolvă sistemul de ecuații, rezultând valorile curenților buclelor;
- P6. Se calculează curenții laturile pe baza valorilor curenților buclelor.

Verificarea soluției se face cu ajutorul bilanțului puterilor (global) sau verificând ecuațiile primei teoreme a lui Kirchhoff în noduri cât mai ramificate (local).

B. Metoda potențialelor nodurilor (nodală)

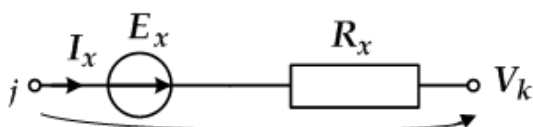
Principiul acestei metode constă în determinarea potențialelor nodurilor din vârfurile arborelui complet (potențiale independente) în raport cu potențialul celui de-al N -lea nod, considerat de referință ($V_0=0$).

Numărul ecuațiilor este redus în acest caz la $N-1$.

Obs: Existența surselor ideale de tensiune reduce sistemul de rezolvare, iar curenții prin acestea sunt determinați ulterior aplicând prima teoremă a lui Kirchhoff.

Algoritmul de aplicare a metodei:

- P1. Se alege nodul de referință (potențial zero);
- P2. Se aleg sensurile de referință pentru curenții laturilor;
- P3. Se scriu ecuațiile primei teoreme a lui Kirchhoff în cele $N-1$ noduri independente;
- P4. Se exprimă curenții laturilor în funcție de potențialele extremităților (legea lui Ohm):



$$V_j - V_k = R_x \cdot I_x - E_x$$

$$I_x = \frac{V_j - V_k + E_x}{R_x}$$

Fig. 2.9. Legea lui Ohm pentru o latură de circuit

- P5. Se rezolvă sistemul de ecuații, rezultând potențialele nodurilor;
- P6. Se calculează tensiunile și curenții laturilor pe baza valorilor potențialelor:



Fig. 2.10. Determinarea tensiunii la bornele sursei de curent pe baza potențialelor electrice

Verificarea soluției se face cu ajutorul bilanțului puterilor.

C. Metoda superpoziției (teorema suprapunerii efectelor)

Într-un circuit electric liniar cu n surse independente, din care n_E surse de tensiune și n_I surse de curent, intensitatea curentului electric (tensiunea electrică) prin orice latură este suma algebrică a intensităților curenților (tensiunilor electrice) pe care i-ar (le-ar) stabili în acea latură fiecare dintre surse, dacă s-ar afla singură în circuit, celelalte surse fiind pasivizate.

$$I = \sum_{k=1}^{n_E} \alpha_k \cdot E_k + \sum_{j=1}^{n_I} \beta_j \cdot J_j$$

$$U = \sum_{k=1}^{n_E} \gamma_k \cdot E_k + \sum_{j=1}^{n_I} \delta_j \cdot J_j$$

Pasivizarea surselor independente constă în înlocuirea lor cu rezistențele interne: sursa ideală de tensiune are rezistența zero, iar sursa ideală de curent are rezistența infinit.

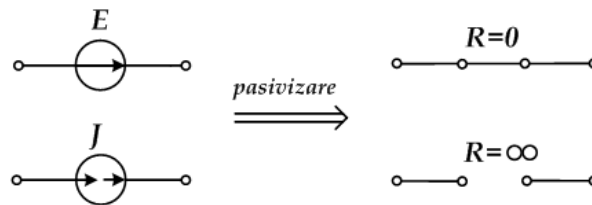


Fig. 2.11. Pasivizarea surselor ideale de energie

Obs: Sursele comandate nu se pasivizează.